

IV. Статика и гидростатика

1. Для равновесия твердого тела или системы тел необходимо одновременное выполнение двух условий:

I условие равновесия: Сумма внешних сил, действующих на систему, должна быть равна нулю.

$$\vec{F}_1^{\text{внеш}} + \vec{F}_2^{\text{внеш}} + \dots = 0$$

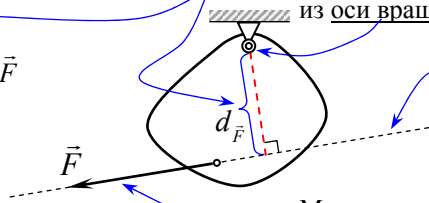
II условие равновесия: Сумма моментов внешних сил, действующих на систему, должна быть равна нулю относительно любой оси вращения.

$$M_{\vec{F}_1^{\text{внеш}}} + M_{\vec{F}_2^{\text{внеш}}} + \dots = 0$$

2. **Вращающим моментом** силы относительно оси вращения называется взятое со знаком «+» или «-» произведение модуля этой силы на ее плечо. **Плечом силы** называется длина перпендикуляра, проведенного из оси вращения на линию действия этой силы

$$M_{\vec{F}} = \pm F \cdot d_{\vec{F}}$$

Знак «+» берется, если сила \vec{F} стремится повернуть тело против часовой стрелки, знак «-» — если по часовой.



Замечание. Приведенное здесь определение вращающего момента справедливо лишь для сил, лежащих в плоскости перпендикулярной оси вращения.

Момент этой силы — отрицательное число: $M_{\vec{F}} < 0$

Единица измерения M в СИ: 1 Н·м

3. Не всегда одновременное выполнение I и II условий равновесия гарантирует неподвижность механической системы. Покой системы невозможен в положениях **неустойчивого равновесия** (т.е. в таких положениях, любое бесконечно малое смещение из которых, приводит к тому, что сумма внешних сил (или их моментов) стремится еще больше удалить систему от равновесного положения). Реализованы могут быть только положения **устойчивого равновесия** (т.е. такие положения, любое бесконечно малое смещение из которых, приводит к тому, что сумма внешних сил (или их моментов) стремится вернуть систему обратно в равновесное положение) и положения **безразличного равновесия** (т.е. положения, при бесконечно малых смещениях из которых сумма внешних сил и их моментов остается равна нулю).

4. **Центром масс** системы материальных точек m_1, m_2, \dots, m_N называется геометрическая точка (C), координаты которой определяются формулами:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}; \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}; \quad z_C = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

Центр тяжести (т.е. точка приложения равнодействующей силы тяжести) совпадает с центром масс системы, если эта система находится в однородном гравитационном поле (или напряженность поля тяготения меняется в пределах системы незначительно)

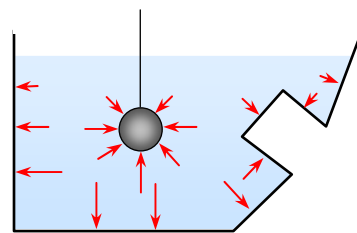
5. **Сила гидростатического давления** — сила, с которой покоящаяся жидкость действует на погруженные в нее тела, стенки и дно сосуда, в котором жидкость находится (без учета поверхностного натяжения).

По своей природе эта сила является

силой объемной упругости

Она возникает, если жидкость сжата (например, прижата силой тяготения к внутренней поверхности неподвижного сосуда) и зависит от степени сжатия.

Сила гидростатического давления всегда направлена перпендикулярно к той поверхности, на которую она действует (поскольку сила объемной упругости не может иметь составляющей параллельной поверхности, деформированного тела, а упругостью формы жидкость не обладает)



6. **Давлением жидкости** на плоскую поверхность называется отношение силы гидростатического давления, действующей на эту поверхность, к площади поверхности (при условии, что сила распределена по поверхности равномерно).

$$p = \frac{F_{\text{гидр. давл.}}}{S}$$

- поверхность плоская
- давление одинаково во всех точках поверхности

Если сила давления неравномерно распределена по поверхности, то можно вычислить **среднее давление** или **давление в данной точке поверхности**

$$p = \frac{dF_{\text{гидр. давл.}}}{dS}$$

Сила гидростатического давления, действующая на бесконечно малую площадку dS

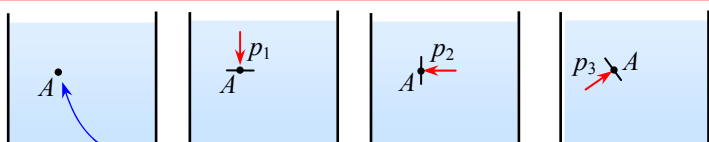
площадь бесконечно малой площадки (эта площадь dS мала настолько, что площадку можно с достаточной точностью считать плоской и изменением давления в пределах dS можно пренебречь)

$$p_{\text{ср}} = \frac{F_{\text{гидр. давл.}}}{S}$$

поверхность плоская

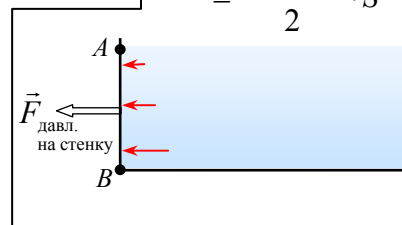
Единица измерения давления в СИ: 1 Па = 1 Н/м².

7. Давление в какой-либо точке жидкости — это давление на воображаемую бесконечно малую площадку, на которой лежит эта точка. Причем, можно доказать, что давление в данной точке жидкости не зависит от ориентации той воображаемой бесконечно малой площадки, на которую производится это давление.

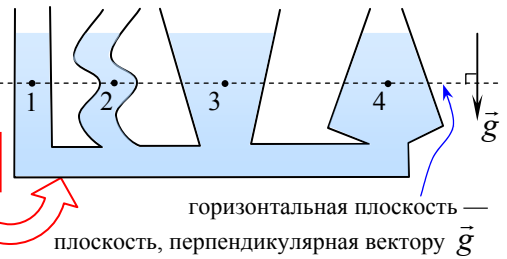


Давление в точке жидкости A

$$F_{\text{давл. на стенку}} = p_{\text{ср}} \cdot S = \frac{P_A + P_B}{2} \cdot S$$



8. В однородной покоящейся жидкости — жидкость неподвижна относительно стенок сосуда (не течет), а сосуд не имеет ускорения в ИСО



давления в точках, лежащих в одной горизонтальной плоскости (на одном уровне), одинаковы.

плотность жидкости ρ одинакова во всех ее точках

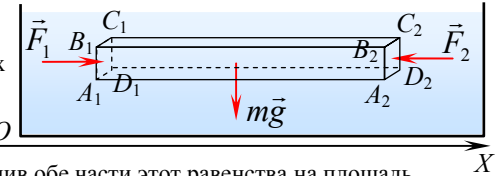
Открытая в атмосферу, свободная поверхность жидкости горизонтальна,

т. к. во всех ее точках давление одинаково и равно атмосферному.

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4$$

Док-во: Мысленно выделим в жидкости прямоугольный параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Площадь $A_1B_1C_1D_1$ так мала, что во всех ее точках давление одинаково. Сторона A_1A_2 горизонтальна. Выделенный объем жидкости находится в равновесии, поэтому сумма всех действующих на него сил равна нулю: $m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{бок} = 0$ (Сила $\vec{F}_{бок}$ — сумма сил гидростатического давления на боковые поверхности $A_1B_1B_2A_2, B_1C_1C_2B_2, C_1D_1D_2C_2, D_1A_1A_2D_2$.)

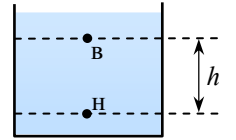
В проекциях на горизонтальную ось OX это уравнение имеет вид: $F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$. Разделив обе части этого равенства на площадь $A_1B_1C_1D_1$, получим что давления на площадки $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ равны: $p_1 = p_2$.



9. В однородной покоящейся жидкости давления в точках, лежащих на разных горизонтальных уровнях, отличаются на

$$p_H - p_B = \rho gh$$

ρ — плотность жидкости
 h — расстояние между верхним и нижним уровнями
 g — ускорение свободного падения



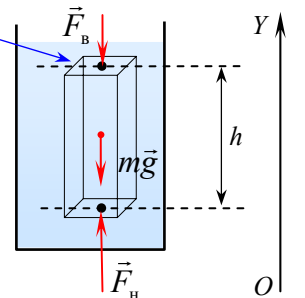
Док-во: Мысленно выделим в жидкости прямоугольный параллелепипед с горизонтальными основаниями. Выделенный объем жидкости находится в равновесии, поэтому сумма всех действующих на него сил равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{F}_H + \vec{F}_B + \vec{F}_{бок} = 0$$

(Сила $\vec{F}_{бок}$ — сумма сил гидростатического давления на боковые вертикальные поверхности.)

В проекциях на вертикальную ось OY это уравнение имеет вид: $-mg + F_H - F_B = 0 \Rightarrow F_H - F_B = mg = \rho Shg$ (здесь масса выделенного объема жидкости m представлена как произведение ее плотности ρ на объем $V = Sh$)

Разделив обе части этого равенства на площадь основания S , получим: $p_H - p_B = \rho gh$.

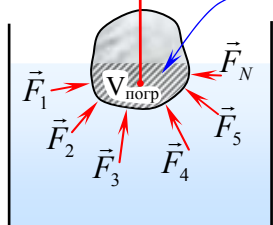


10. Архимедова сила — выталкивающая (подъемная) сила, действующая на тело, погруженное

в жидкость или газ. Архимедова сила есть сумма всех сил гидростатического давления, действующих на тело, погруженное в жидкость или газ (кроме тех случаев, когда тело плотно прижато к дну или стенке сосуда так, что жидкость (газ) не проникает между телом и дном (стенкой) — в этих случаях суммарную силу гидростатического давления не называют архимедовой силой)

Рис. 10.1

$$\vec{F}_{Арх} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$$



$$F_{Арх} = m_{выт} \cdot g$$

ускорение свободного падения

$m_{выт}$ — масса «вытесненной» жидкости — масса такой же жидкости, как вокруг тела, которая уместилась бы в объеме погруженной части тела $V_{погр}$

$$F_{Арх} = \rho_{ж} \cdot V_{погр} \cdot g$$

если жидкость однородна
 ρ — плотность среды (жидкости или газа), в которую погружено тело

Док-во: Сумма сил гидростатического давления $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \vec{F}_{Арх}$, действующих на объем $V_{погр}$ не зависит от того, какое вещество

находится внутри этого объема ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ — силы упругости, они зависят от деформации жидкости, окружающей объем $V_{погр}$, а не от содержимого этого объема). Мысленно выделим в покоящейся жидкости объем, совпадающий с $V_{погр}$ по форме и расположению (рисунок 10.2). На него будут действовать точно такие же силы гидростатического давления $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, как и на объем погруженной части тела $V_{погр}$. Выделенный в жидкости объем находится в равновесии, значит,

$$\vec{F}_{Арх} + m_{выт} \vec{g} = 0 \Rightarrow F_{Арх} = m_{выт} \cdot g$$

что и требовалось доказать.

(В этом доказательстве считается, что атмосферного давления нет. Чтобы учесть его наличие, можно рассматривать тело на рисунке 10.1, как плавающее на границе раздела двух сред — жидкости (ρ_2) и воздуха (ρ_1))

Если тело плавает на границе нескольких сред, плотностями ρ_1, ρ_2, \dots (На рис. 10.3 пример, когда сред две), то масса вытесненной жидкости $m_{выт}$ находится как сумма $m_{выт} = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \dots$ (V_1 — объем той части тела, которая погружена в первую среду, V_2 — объем той части тела, которая погружена во вторую среду, и т. д.)

Архимедова сила в этом случае равна $F_{Арх} = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \dots)g$

11. Если сосуд с жидкостью движется с ускорением \vec{a} в ИСО, то в системе отсчета, связанной с сосудом, на каждую точку этой жидкости вместе с силой тяжести $m\vec{g}$ действует сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$. Если жидкость неподвижна относительно сосуда, то в системе отсчета, связанной с движущимся сосудом, можно использовать формулы из пунктов 9 и 10, заменяя в них \vec{g} на $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$.

$$p_2 = p_3$$

$$p_1 - p_2 = \rho g' h$$

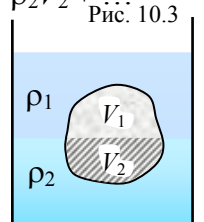
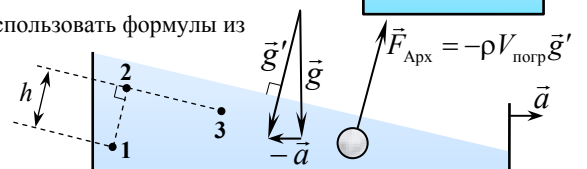


Рис. 10.3