Гущин Д. Д.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ 3 И 6: ПЛАНИМЕТРИЯ

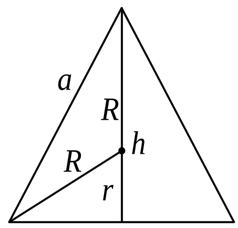
ЭТО НАДО ЗНАТЬ: ТРЕУГОЛЬНИКИ

Треугольник — фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника. Вершина угла равнобедренного треугольника, лежащая напротив основания, называется *вершиной* равнобедренного треугольника. Высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника, проведенные к его основанию, совпадают. Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Высоты (медианы, биссектрисы), проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника равны.

Равносторонний треугольник. Треугольник, все три стороны которого равны, называется *правильным* (*равносторонним*) треугольником.

Пусть a, h, S, R, r – соответственно длина стороны, высота, площадь, радиус описанной и радиус вписанной окружности правильного треугольника. Тогда имеют место следующие соотношения:



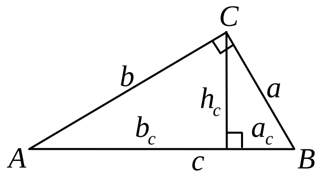
$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2},\qquad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\qquad R=\frac{a}{\sqrt{3}},\qquad r=\frac{a}{2\sqrt{3}},$$

$$r=\frac{1}{3}h,\qquad R=\frac{2}{3}h,\qquad R=2r,\qquad r+R=h.$$

Прямоугольный треугольник. Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется *прямоугольным*. В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла называется *гипотенузой*, а две другие стороны называются *катетами* этого треугольника.

Обозначим через c гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC, через a_c и b_c — проекции катетов a и b на гипотенузу AB, а через h_c — высоту, проведенную из вершины прямого угла C этого треугольника. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$a^2+b^2=c^2,$$



$$a_c=\frac{a^2}{c},\qquad b_c=\frac{b^2}{c},\qquad h_c=\frac{ab}{c},\qquad h_c=\sqrt{a_cb_c},$$

$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad \cos A=\frac{b}{c},\qquad \operatorname{tg} A=\frac{a}{b},\qquad \operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}.$$

Основное тригонометрическое тождество и следствия из него:

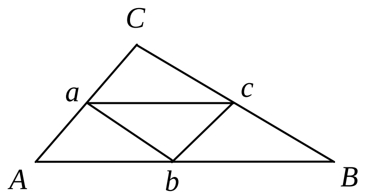
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Тригонометрические функции дополнительных углов являются сходственными:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

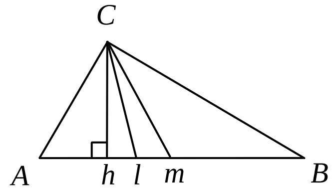
Синусы смежных углов равны, а косинусы, тангенсы и котангенсы противоположны:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\qquad \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\qquad \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

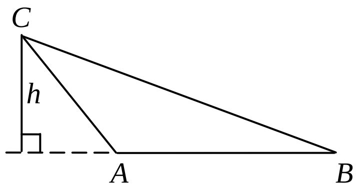


Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника называется *средней линией* треугольника. Средняя линия треугольника параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине. Три средние линии треугольника делят его на 4 равных треугольника.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой* треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и точка пересечения делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.



Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой* треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (центре вписанной окружности). Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.



Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника, на прямую, содержащую противоположную сторону, называется *высотой* треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (центре описанной окружности).

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, уменьшенной на удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов): $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

ЭТО НАДО ЗНАТЬ: ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Параллелограмм. *Параллелограммом* называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Справедливы следующие утверждения.

– Две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

– Противоположные стороны четырехугольника попарно равны тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

– Противоположные углы четырехугольника попарно равны тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

– Диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

Прямоугольник. *Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые. Так как прямоугольник, по определению, является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, прямоугольник обладает следующим характеристическим свойством.

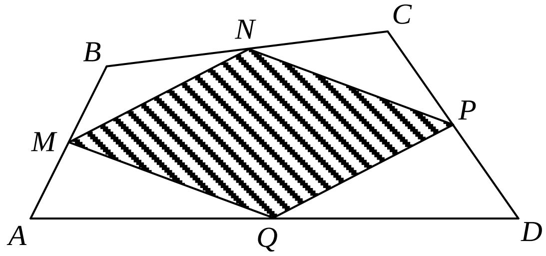
Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда этот параллелограмм — прямоугольник.

Ромб. *Ромбом* называется параллелограмм, все стороны которого равны. Так как ромб, по определению, является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, ромб обладает следующими характеристическими свойствами.

Диагонали параллелограмма делят его углы пополам тогда и только тогда, когда этот параллелограмм — ромб.

Диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда этот параллелограмм — ромб.

Параллелограмм Вариньона. Середины сторон произвольного (в том числе невыпуклого или даже пространственного) четырехугольника являются вершинами параллелограмма — *параллелограмма Вариньона*.



Стороны этого параллелограмма параллельны соответствующим диагоналям четырехугольника.

Периметр параллелограмма Вариньона равен сумме длин диагоналей исходного четырехугольника, а площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади исходного четырехугольника.

Если исходный параллелограмм — прямоугольник, то параллелограмм Вариньона — ромб. Если исходный параллелограмм — ромб, то параллелограмм Вариньона — прямоугольник. Если исходный параллелограмм — квадрат, то параллелограмм Вариньона — квадрат.

Трапеция. *Трапецией* называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие стороны — *боковыми сторонами*. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции называется *средней линией* трапеции. Трапеция, боковые стороны которой равны, называется *равнобедренной* трапецией. Трапеция, один из углов которой прямой, равен называется *прямоугольной* трапецией. Трапеция обладает следующими свойствами.

– Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

– Отрезок, соединяющие середины диагоналей трапеции, равен полуразности большего и меньшего оснований.

– Диагонали трапеции равны тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.

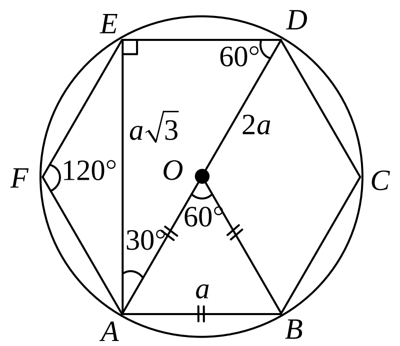
– Углы при каждом основании трапеции равны тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.

– Сумма противолежащих углов в равнобедренной трапеции равна 180°.

– В равнобедренной трапеции расстояние от вершины одного основания до проекции противоположной вершины на прямую, содержащую это основание, равно средней линии.

ЭТО НАДО ЗНАТЬ: ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

Правильный шестиугольник. Правильным шестиугольником называется шестиугольник, у которого все стороны и углы равны. Правильный шестиугольник обладает следующими свойствами.



– Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной вокруг него окружности.

– Большая диагональ правильного шестиугольника является диметром описанной вокруг него окружности и равна двум его сторонам.

– Меньшая диагональ правильного шестиугольника в $\sqrt{3}$ раз больше его стороны.

– Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120°.

– Меньшая диагональ правильного шестиугольника перпендикулярна его стороне.

– Треугольник, образованный стороной шестиугольника, его большей и меньшей диагоналями, прямоугольный, а его острые углы равны 30° и 60°.

ЭТО НАДО ЗНАТЬ: ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Теоремы о площадях многоугольников. Для вычисления площадей многоугольников применяют следующие теоремы.

– Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне или к ее продолжению.

– Площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними.

– Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

– Площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

– Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

– Площадь параллелограмма равна произведению сторон на синус угла между ними.

– Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

– Площадь ромба равна произведению квадрата стороны на синус угла между сторонами.

– Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

– Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

– Площади подобных многоугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

– Площадь многоугольника, вершины которого лежат в узлах решетки, равна $B + \mathit{\Gamma}/2 - 1$, где B — количество узлов внутри многоугольника, а $\mathit{\Gamma}$ — количество узлов на границе многоугольника.

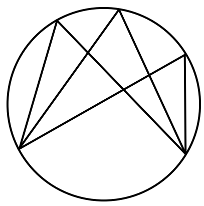
ЭТО НАДО ЗНАТЬ: ОКРУЖНОСТИ

Окружность и ее элементы. *Окружностью* называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Любые две точки окружности делят ее на две части, каждая из которых называется дугой окружности, а данные точки называются концами этих дуг.

Если дуга AB окружности с центром O меньше или равна полуокружности, то за ее градусную (радианную) меру принимается градусная (радианная) мера центрального угла AOB, если дуга AB больше полуокружности, то ее градусную (радианную) меру считают равной $360° - \widehat{AOB}$ $(2\pi - \widehat{AOB})$.

Вписанный угол. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом*. Справедливы следующие утверждения.

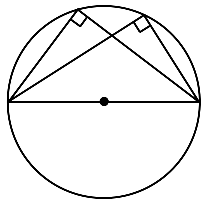


– Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

– Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

– Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

– Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.



– Отношение хорды к синусу вписанного угла, который на нее опирается, равно двум радиусам (теорема синусов).

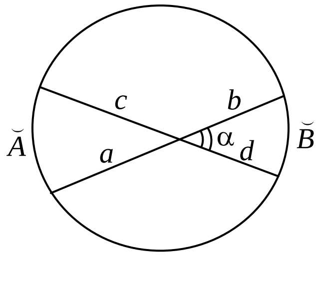
Хорда. Отрезок, концы которого лежат на окружности, называется ее *хордой*. Справедливы следующие утверждения.

– Равные хорды стягивают равные дуги.

– Углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, либо равны, либо в сумме дают 180°.

– Хорда, равная диаметру, из всех точек окружности видна под углом 90°.

– Радиус окружности, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.



– Угол между двумя хордами равен полусумме высекаемых ими дуг: $\alpha = \dfrac{\breve{A} + \breve{B}}{2}$.

– Произведение отрезков, на которые делится хорда данной точкой, есть для данной окружности величина постоянная и равная разности квадратов радиуса окружности и расстояния от точки пересечения хорд до центра окружности: $ab = cd = R^2 - l^2$.

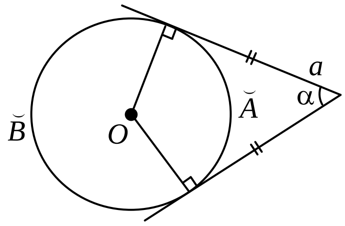
Касательная. Прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку, называется касательной к окружности. Справедливы следующие утверждения.

– Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

– Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

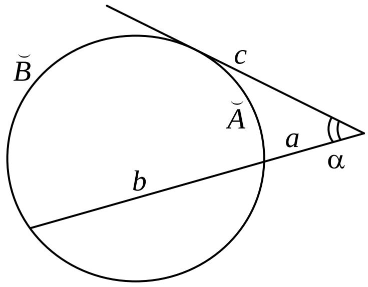
– Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине заключенной между ними дуги.

– Угол между двумя касательными к окружности, проведенными из одной точки, равен полуразности большей и меньшей высекаемых ими дуг.



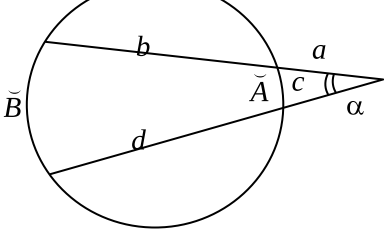
Секущая. Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется секущей. Справедливы следующие утверждения.

– Угол между касательной и секущей, проведенными из одной точки, равен полуразности большей и меньшей высекаемых ими дуг: $\alpha = \dfrac{\breve{B} - \breve{A}}{2}$.



– Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть: $a(a+b) = c^2$.

– Угол между секущими, проведенными из одной точки, равен полуразности большей и меньшей высекаемых ими дуг: $\alpha = \dfrac{\breve{B} - \breve{A}}{2}$.



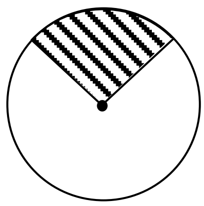
– Произведение секущей на ее внешнюю часть есть для данной окружности величина постоянная и равная разности квадратов расстояния от точки пересечения секущих и квадрата радиуса окружности: $(a+b)a = (c+d)c = l^2 - R^2$.

Круг. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом*. Центр, радиус и диаметр окружности, ограничивающей круг, называются также центром, радиусом и диаметром круга. Любые два радиуса делят круг на две части, каждая из которых называется *круговым сектором* или просто *сектором*. Дуга, ограничивающая сектор, называется дугой сектора. Любая хорда делит круг на две части, каждая из которых называется *круговым сегментом* или просто *сегментом*.

Соотношения между элементами окружности и круга. Пусть r — радиус окружности, d — ее диаметр, C — длина окружности, S — площадь круга, l_{n° — длина дуги в n градусов, l_α — длина дуги в α радиан, S_{n° — площадь сектора, ограниченного дугой в n градусов, S_α — площадь сектора, ограниченного дугой в α радиан. Тогда имеют место следующие соотношения:

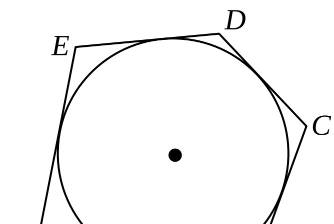
$$C = 2\pi r, \qquad l_{n^\circ} = \pi r \frac{n}{180}, \qquad S_{n^\circ} = \pi r^2 \frac{n}{360},$$

$$S = \pi r^2, \qquad l_\alpha = r\alpha, \qquad S_\alpha = \frac{1}{2} r^2 \alpha.$$



Вписанная окружность. Окружность называется *вписанной* в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности. Многоугольник в этом случае называется описанным около окружности.

Центр окружности, вписанной в многоугольник, есть точка, равноудаленная от всех сторон этого многоугольника, — точка пересечения биссектрис углов этого многоугольника. В многоугольник можно вписать окружность и притом только одну, тогда и только тогда, когда биссектрисы его углов пересекаются в одной точке.

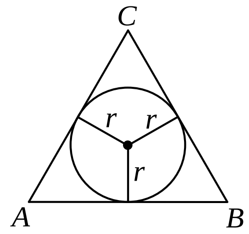


В любой треугольник можно вписать окружность.

В правильный многоугольник можно вписать окружность.

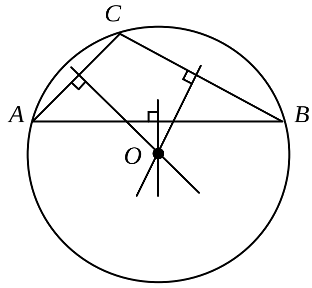
В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

Если окружность радиуса r вписана в многоугольник, площадь которого равна S, а полупериметр равен p, то имеет место соотношение $S = pr$: площадь описанного многоугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности.



Если окружность вписана в правильный треугольник, то ее радиус r выражается через его сторону a по формуле $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

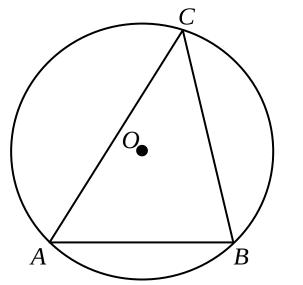
Если окружность радиуса r вписана в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, то $r = \frac{a+b-c}{2}$.



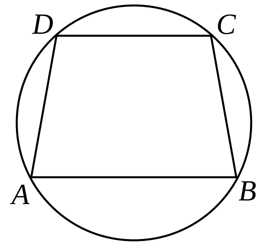
Если окружность вписана в квадрат, то ее радиус равен половине стороны квадрата.

Описанная окружность. Определение. Окружность называется *описанной* вокруг многоугольника, если все вершины многоугольника принадлежат этой окружности. Многоугольник в этом случае называется вписанным в окружность.

Центр окружности, описанной вокруг многоугольника, есть точка, равноудаленная от всех вершин этого многоугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого многоугольника. Около многоугольника можно описать окружность и притом только одну, тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры к сторонам этого многоугольника пересекаются в одной точке.



Около любого треугольника можно описать окружность. Радиус описанной окружности равен отношению половины стороны к синусу противолежащего угла: $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

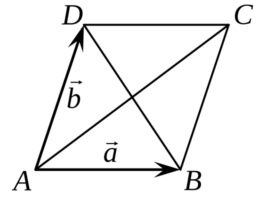


Около правильного многоугольника можно описать окружность.

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны

Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.

ЭТО НАДО ЗНАТЬ: ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ



Векторы. Сумма и разность векторов. Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется направленным отрезком или *вектором*.

Для того, чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, достаточно отложить от какой-нибудь точки A векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Чтобы найти сумму $\vec{a} + \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо в конец вектора $\vec{a}$ поместить начало вектора $\vec{b}$ и провести вектор из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$.

Чтобы найти разность $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо в начало вектора $\vec{a}$ поместить начало вектора $\vec{b}$ и провести вектор из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$.

Координаты вектора. Пусть точка *A* имеет координаты $(x_A; y_A)$, точка *B* имеет координаты $(x_B; y_B)$, а точка *C* — середина отрезка *AB*. Тогда координаты точки *C* равны полусумме соответствующих координат концов отрезка:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Пусть точка *A* имеет координаты $(x_A; y_A)$, точка *B* имеет координаты $(x_B; y_B)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разности соответствующих координат конца вектора и его начала:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A).$$

Декартовы координаты вектора являются проекциями этого вектора на соответственные оси систем координат.

Модуль вектора (длина вектора) $\vec{a}$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$.

Пусть даны векторы $\vec{a} = (x_a; y_a)$, и $\vec{b} = (x_b; y_b)$. Тогда:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b;\ y_a + y_b),$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (x_a - x_b;\ y_a - y_b),$$
$$k\vec{a} = (kx_a;\ ky_a),$$

т. е. действиям с векторами отвечают идентичные действия с их координатами.

Скалярное произведение векторов. *Скалярным произведением двух ненулевых векторов* называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Иными словами, скалярное произведение векторов — это число. Если через φ обозначить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а через $\vec{a} \cdot \vec{b}$ — их скалярное произведение, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi.$$

Скалярное произведение выражается через координаты сомножителей по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b.$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_a x_b + y_a y_b = 0.$$

Косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}.$$

Поскольку косинус острого угла положителен, а косинус тупого угла — отрицателен, то, если скалярное произведение положительно, векторы образуют острый угол, а если отрицательно — тупой.

Расстояния от точки до координатных осей. Для определения расстояний от точки до осей координат применяют следующие утверждения.

– Модуль абсциссы точки равен расстоянию от этой точки до оси ординат.

– Модуль ординаты точки равен расстоянию от этой точки до оси абсцисс.

Расстояние между точками. Пусть точка A имеет координаты $(x_A; y_A)$, точка B имеет координаты $(x_B; y_B)$, тогда расстояние между ними находится по формуле:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Задания по геометрии достаточно традиционны. Большая часть заданий этого типа являются несложными, однако объем теоретического материала, которым надо владеть, достаточно обширен. Определения, теоремы и формулы следует выучить и постоянно повторять, проверяя себя.