СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ 9: ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Сложение и вычитание дробей. Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить без изменений. Чтобы вычесть две дроби с одинаковыми знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить без изменений. Чтобы сложить или вычесть две дроби с разными знаменателями, необходимо сначала привести дроби к общему знаменателю.

Умножение дробей. Чтобы умножить две дроби, надо перемножить их числители, перемножить их знаменатели, и разделить первое произведение на второе.

Деление дробей. Чтобы разделить дробь на дробь, надо умножить первую дробь на дробь, обратную второй.

Возведение дроби в степень. Чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель, и разделить степень числителя на степень знаменателя.

Формулы сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b), \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2, \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2), \qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Степень. Пусть дано положительное число a и произвольное действительное число n. Число a^n называется *степенью*, число a — *основанием степени*, число n — *показателем степени*.

Напомним, что по определению полагают:

$$a^1=a, \qquad a^0=1, \qquad a^{-x}=\frac{1}{a^x},\ x\in\mathbb{R}.$$

Степень с дробным показателем. Если a — положительное число, m — целое число, а n — натуральное число и $n\ge 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

В частности, например,

$$a^{-1}=\frac{1}{a}, \qquad a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}, \qquad a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}, \qquad a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}=(\sqrt[4]{a})^3.$$

Свойства степени. Если a и b — положительные числа, x и y — любые действительные числа, то справедливы следующие свойства:

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}, \qquad a^x:a^y=a^{x-y},$$
$$(a^x)^y=a^{xy}, \qquad a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x, \qquad \frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Арифметический корень. Пусть n — натуральное число, отличное от единицы, a — неотрицательное число. *Арифметическим корнем* n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Для арифметического корня n-й степени из неотрицательного числа a используется обозначение $\sqrt[n]{a}$. Если $n = 2$, пишут $\sqrt{a}$. По определению $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Для любых, в том числе отрицательных, значений a справедлива формула $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, в частности,

$$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \text{и} \qquad \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|.$$

Свойства арифметического корня. Если a и b — неотрицательные числа, n и k — натуральные числа, отличные от единицы, m —целое число, то имеют место следующие соотношения:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0,$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}, \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{k+n}}, \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{k-n}}.$$

Степень с дробным показателем. Если a — положительное число, m — целое число, а n — натуральное число и $n \geq 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Определение логарифма. Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Для логарифма положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) используется обозначение $\log_a b$.

По определению

$$a^{\log_a b} = b,$$

это равенство называется *основным логарифмическим тождеством*.

Частные случаи:

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1, \qquad \log_a a^n = n.$$

Логарифм положительного числа b по основанию 10 называется десятичным логарифмом и обозначается $\lg b$.

Логарифм положительного числа b по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln b$.

Свойства логарифмов. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $m \neq 0$, n — любое действительное число, то справедливы следующие свойства:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy), \qquad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$$

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x, \qquad \log_{a^m} a^n = \frac{n}{m},$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad \log_a c = \frac{1}{\log_c a},$$

$$\log_a x \cdot \log_c y = \log_a y \cdot \log_c x.$$

Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha \qquad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Правило для запоминания формул приведения. Чтобы записать формулу приведения для аргументов $0{,}5\pi\pm\alpha,\ \pi\pm\alpha,\ 1{,}5\pi\pm\alpha$ необходимо: 1) определить *четверть*, в которой лежит аргумент приводимой функции, предполагая α острым углом; 2) определить *знак* приводимой функции в этой четверти; 3) определить *вид функции,* не меняя ее названия для аргументов $\pi\pm\alpha$, и изменяя функцию на сходственную для аргументов $0{,}5\pi\pm\alpha,\ 1{,}5\pi\pm\alpha$. А именно:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha, \qquad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Свойства четности и нечетности функций

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

Табличные значения тригонометрических функций

$\sin 0=0$	$\cos 0=1$	$\operatorname{tg}0=0$	$\operatorname{ctg}0$ не существует
$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$	$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$
$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$
$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin\frac{\pi}{2}=1$	$\cos\frac{\pi}{2}=0$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$

ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Задания на действия с числовыми и алгебраическими дробями вполне привычны из курса математики 5—6 классов и алгебры 7 класса. Напомним только, что при выполнении действий с числовыми дробями разных типов, а также при извлечении корня обычно бывает удобно переводить десятичные дроби в обыкновенные, а смешанные — в неправильные.

При решении многих задач ЕГЭ необходимо установить связь между различными основаниями степени, поэтому будет полезно знать некоторые степени чисел в пределах 1000:

$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$	$2^5=32$	$2^6=64$
$2^7=128$	$2^8=256$,	$2^9=512$	$2^{10}=1024$	
$3^2=9$	$3^3=27$	$3^4=81$	$3^5=243$	$3^6=729$
$4^2=16$	$4^3=64$	$4^4=256$	$4^5=1024$	
$5^2=25$	$5^3=125$	$5^4=625$		
$6^2=36$	$6^3=216$	$7^2=49$	$7^3=343$	
$8^2=64$	$8^3=512$	$9^2=81$	$9^3=729$	

Большая часть заданий экзаменационных заданий на преобразования логарифмических выражений представляет собой задачи на вычисление логарифмов; задания на преобразования буквенных логарифмических выражений представлены всего тремя прототипами. При подготовке следует обратить особое внимание на формулу перехода к новому основанию логарифма и следствия из нее: задачи на использование этих формул в школьных учебниках практически не встречаются.

Большая часть заданий по тригонометрии представляет собой задачи на вычисление значений числовых тригонометрических выражений с применением формул двойных углов и формул приведения. При этом наиболее часто используются следующие следствия из формул приведения: если $\alpha+\beta=90°$, то $\sin\alpha=\cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$, а если $\alpha+\beta=180°$, то синусы углов α и β равны, а их косинусы, тангенсы и котангенсы противоположны.