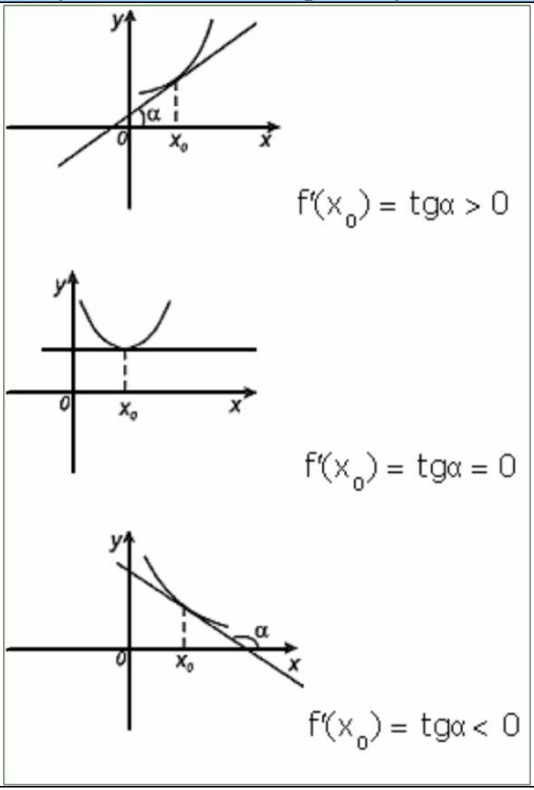
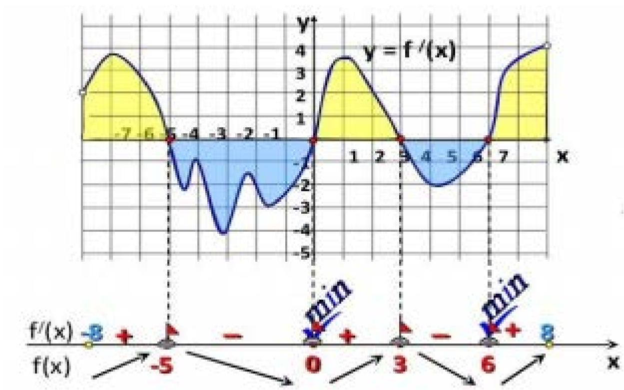
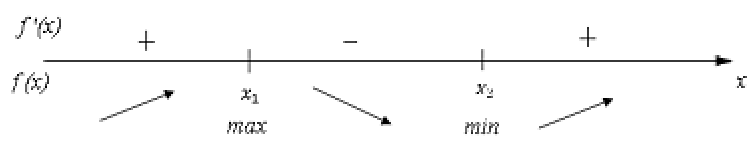
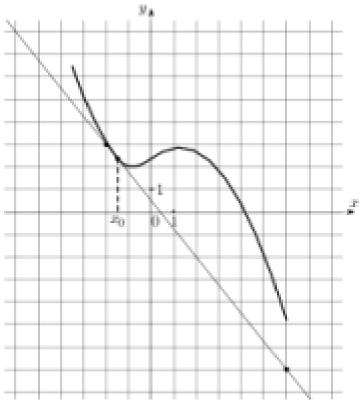
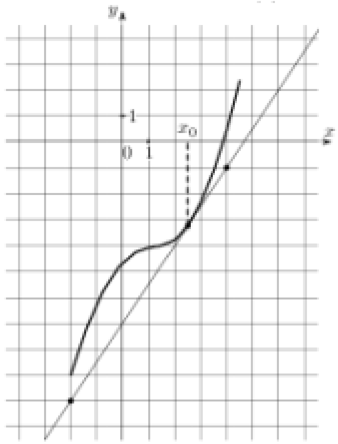
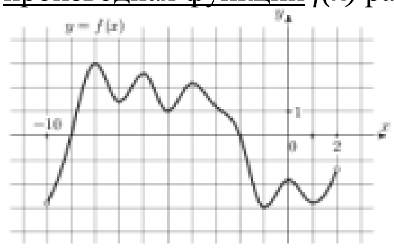
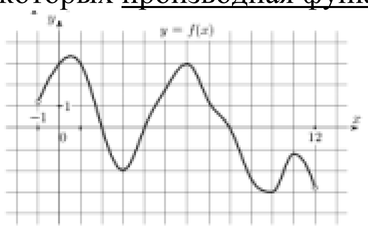
Справочник
Задание №7 профильная математика

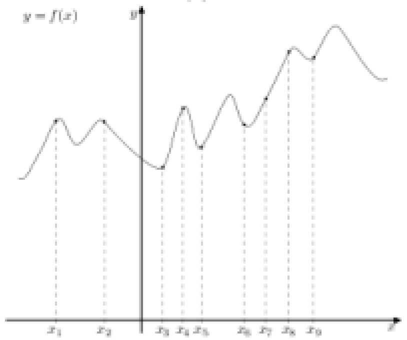
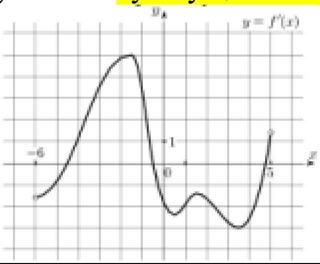
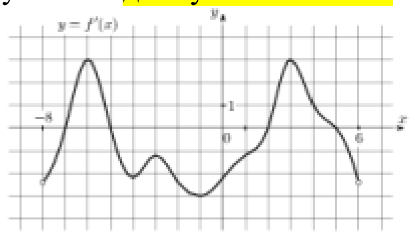
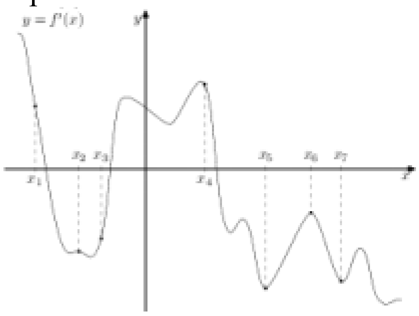
Производной функции $y=f(x)$в точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю. То есть,

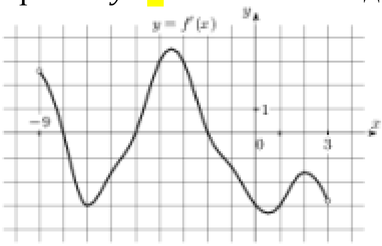
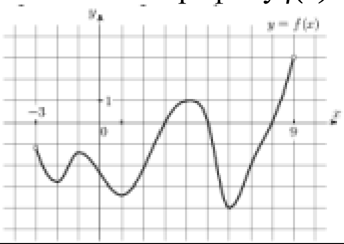
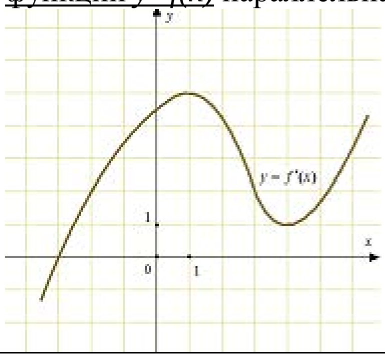
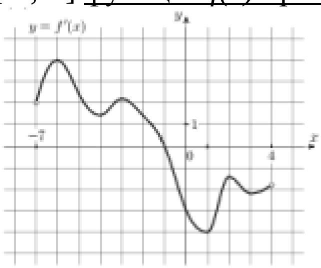
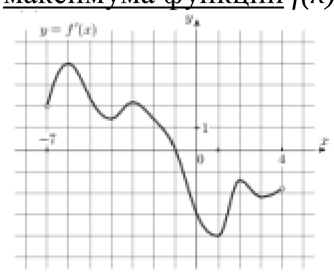
$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

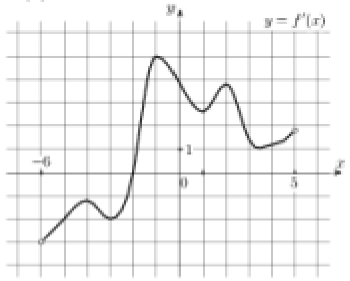
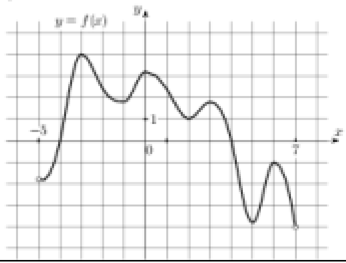
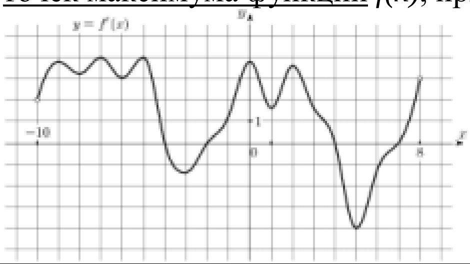
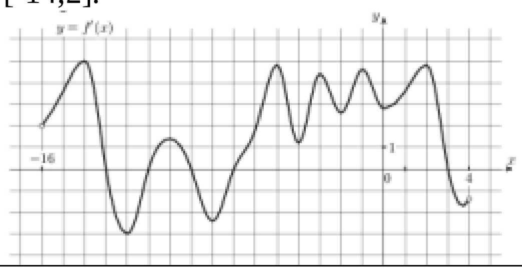
Геометрический смысл производной	**Физический смысл производной**
Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке (тангенсу угла между касательной и осью Ох) $f'(x_o) = k = tg\ \alpha$	Если точка движется вдоль оси х и ее координата изменяется по закону x(t), то мгновенная скорость точки: $V(t)=x'(t)$
• Если f'(x) > 0 на промежутке, то функция f(x) возрастает на этом промежутке. Если f'(x) < 0 на промежутке, то функция f(x) убывает на этом промежутке	• Если функция f(x) возрастает на промежутке, то f'(x) > 0 на этом промежутке. Если функция f(x) убывает на промежутке, то f'(x) < 0 на этом промежутке
	 **Связь между производной и свойствами функции:** 
Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны	
• Точка x_o называется точкой максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_o, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$. • Точка x_o называется точкой минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_o, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_o) = 0$. • Если x_o – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_o) = 0$.	Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, $x_o \in (a; b)$ и $f'(x_o) = 0$, то: • при переходе через стационарную точку x_o функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», то x_o – точка максимума функции $f(x)$; • при переходе через стационарную точку x_o функции f(x) ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_o – точка минимума функции $f(x)$.

Примеры заданий

№	Задание	Что делать?
1.	На рисунке изображен график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.  	Найти тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс (отношение противолежащего катета к прилежащему катету). На рисунке выделены точки на касательной, на которых как на гипотенузе надо достроить прямоугольный треугольник. Если $\alpha < 90^0$, то $tg\ \alpha > 0$, если $\alpha > 90^0$, то $tg\ \alpha < 0$.
2.	На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определённый на интервале (-10;2). Найдите количество точек, в которых производная функции *f(x)* равна 0. 	Подсчитать количество точек экстремума(минимумы и максимумы)
3.	На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определённый на интервале (-1;12). Найдите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна. 	Подсчитать целые точки на промежутках убывания функции
4.	На рисунке изображен график функции *y=f(x)* и отмечены точки -2, -1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку. 	$x=-2$, то $f\downarrow \Rightarrow f' < 0$ $x=-1$, то f имеет экстремум $\Rightarrow f' = 0$ $x=2$, то $f\uparrow \Rightarrow f' > 0$ $x=3$, то $f\downarrow \Rightarrow f' < 0$

5.	На рисунке изображён <u>график</u> дифференцируемой <u>функции</u> $y=f(x)$, и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. В скольких из этих точек <u>производная функции</u> $f(x)$ отрицательна?  	В скольких точках функция убывает
6.	На рисунке изображен <u>график</u> функции $y=f'(x)$ – <u>производной</u> функции $f(x)$, определённой на интервале (-6;5). Найдите <u>промежутки убывания функции</u> $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.  	Промежутки убывания функции =производная на данном графике отрицательна, т.е.расположена ниже оси Ox. Найти сумму целых точек.
7.	На рисунке изображен <u>график</u> функции $y=f'(x)$ – <u>производной</u> функции $f(x)$, определённой на интервале (-8;6). Найдите <u>промежутки возрастания функции</u> $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.  	Промежутки возрастания функции =производная на данном графике положительна, т.е.расположена выше оси Ox. Записать длину большего промежутка
8.	На рисунке изображены <u>график</u> функции $y=f'(x)$ – <u>производной</u> функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек <u>функция</u> $f(x)$ возрастает?  	Сосчитать количество точек, в которых производная на данном графике положительна
9.	Прямая $y=6x+9$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x-6$. Найдите абсциссу точки касания.	Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны. Найти производную функции $(x^2+7x-6)'=2x+7=k_{кас}=6$ $=>\ x=-0{,}5$
10.	Прямая $y=-9x+5$ параллельна касательной к графику функции $y=ax^2+15x+11$. Найдите a.	Найти производную функции $(ax^2+15x+11)'=2a+15=-9$ $=>\ a=-12$

11.	На рисунке изображён график *y=f'(x)* – производной функции *f(x),* определённой на интервале (-9;3). Найдите количество точек, в которых касательная к графику *f(x)* параллельна прямой *y=2x-19* или совпадает с ней. 	Провести горизонтальную прямую *y*=*2* и сосчитать количество точек пересечения с графиком.
12.	На рисунке изображён график функции *y=f(x),* определённой на интервале (-3;9). Найдите количество точек, в которых касательная к графику *f(x)* параллельна прямой *y=12*. 	Т.к. угловой коэффициент прямой *y=12* равен *0*, то считаем количество точек пересечения с осью Ох.
13.	На рисунке изображен график производной функции *y=f'(x).* Найдите абсциссу точки, в которых касательная к графику функции *y=f(x)* параллельна оси абсцисс или совпадает ней. 	Находим точку на графике *y=f'(x)*, в которой y=0, т.е.точку пересечения данного графика с осью Ох => -3
14.	На рисунке изображен график производной функции *y=f'(x),* определенной на интервале (-7;4). В какой точке отрезка [-6;-1] функция *f(x)* принимает наибольшее значение? 	На отрезке [-6;-1] производная положительна (лежит выше Ох) => функция возрастает, т.е. достигает наибольшего значения при наибольшем значении аргумента => *-1* Значит в *x=-6* достигает наименьшего значения.
15.	На рисунке изображён график *y=f'(x)* – производной функции *f(x),* определённой на интервале (-7;4). Найдите точку максимума функции *f(x).* 	Находим точку на оси Ох, в которой производная меняет свой знак с «+» на «-» => -1

16.	На рисунке изображён график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале (-6;5). Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку [-5;4]. 	Находим точку на оси Ох, в которой производная меняет свой знак => -2
17.	На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале (-5;7). Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$. 	Считаем сумму «горбов и впадин» по оси Ох: -3 + (-1) +0+2+3+5+6=12
18.	На рисунке изображён график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале (-10;8). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [-9;6]. 	Находим точки на оси Ох, в которой производная меняет свой знак с «+» на «-» => $x= -4$ *и* $x=4$ => 2
19.	На рисунке изображён график $y=f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале (-16;4). Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [-14;2]. 	Считаем количество точек пересечения графика производной на рисунке с осью Ох => 5
20.	Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-3t-29$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=3c$.	$V(t=3)=x'(t)=(t^2-3t-29)'=$ $=2t-3=2*3-3=3$
21.	Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=1/6t^3-2t^2-4t+39$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равной $38м/с$.	$V(t)=x'(t)=(1/6t^3-2t^2-4t+39)'=$ $=1/6 *3t^2-2*2t-4=0.5t-4t-4$ Если $V=38$, то $0.5t^2-4t-4=38$ $0.5t^2-4t-4-38=0$ $t^2-8t-84=0$ Решая уравнение через D, находим $t=14$