Построение таблиц истинности логических выражений. Выбор выражения, соответствующего условию.

В компьютере вся информация представлена в двоичной системе счисления, в которой используется две цифры – 0 и 1. Собственно, и цифр как таковых у компьютера нет, а есть электрический сигнал, проходящий по электронным схемам и соединительным проводникам (шинам) компьютера, который может принимать значения “высокий уровень электрического напряжения” (принимаемый нами за 1) и “низкий уровень электрического напряжения” (принимаемый за 0). Для различных действий над этими нулями и единичками нам необходимы специальные операции, которые работают с двоичными переменными. Такие операции называются логическими операциями.

Логические операции и их аргументы принимают только два значения: 1 (“истина”) и 0 (“ложь”).

Таблица истинности выражения определяет его значения при всех возможных комбинациях исходных данных.

Количество строк в таблице истинности выражения от N переменных равно 2^N.

Основные логические операции:

1). Логическое умножение (конъюнкция, логическое И). Обозначается: **AND, &,** ∧.

Таблица истинности:

A	**B**	**A&B**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2). Логическое сложение (дизъюнкция, логическое ИЛИ). Обозначается: **OR, |,** ∨.

Таблица истинности:

A	**B**	**A ∨ B**
1	1	1
1	0	1

0	1	1
0	0	0

3). Логическое отрицание (инверсия, логическое НЕ). Обозначается: NOT, ¬, $\bar{A}$.

Таблица истинности:

A	**¬ A**
0	1
1	0

4). Логическое следование (импликация). Обозначается: →.

Таблица истинности:

A	**B**	**A → B**
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5). Логическое равенство (эквивалентность). Обозначается: ↔**,** ~.

Таблица истинности:

A	**B**	**A ~ B**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Порядок (приоритет) выполнения логических операций:

Если в выражении нет скобок, то операции выполняются в следующем порядке:

- Логическое отрицание (инверсия, логическое НЕ);
- Логическое умножение (конъюнкция, логическое И);
- Логическое сложение (дизъюнкция, логическое ИЛИ);
- Логическое следование (импликация);
- Логическое равенство (эквивалентность).

Выбор выражения по таблице истинности

Пример 1.

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:

x1	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**F**
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0

Каким выражением может быть F?

1) (x1 ∧ x2) ∨ (x3 ∧ x4) ∨ (x5 ∧ x6)

2) (x1 ∧ x3) ∨ (x3 ∧ x5) ∨ (x5 ∧ x1)

3) (x2 ∧ x4) ∨ (x4 ∧ x6) ∨ (x6 ∧ x2)

4) (x1 ∧ x4) ∨ (x2 ∧ x5) ∨ (x3 ∧ x6)

Решение:

Все представленные варианты ответа — дизъюнкции трёх конъюнкций. Все значения F в таблице равны нулю. Дизъюнкция равна нулю, когда все слагаемые равны нулю.

Рассмотри поочерёдно все четыре выражения.

1) В первой строке таблицы x1=1 и x2=1, значит x1∧x2=1. Выражение не подходит.

2) Во второй строке таблицы x1=1 и x3=1, значит x1∧x3=1. Выражение не подходит.

3) Подставим в третье выражение поочередно значения всех строк таблицы:

Первая строка

(x2 ∧ x4) ∨ (x4 ∧ x6) ∨ (x6 ∧ x2) = (1 ∧ 0) ∨ (0 ∧ 0) ∨ (0 ∧ 1) = 0 ∨ 0 ∨ 0 = 0

Вторая строка

(x2 ∧ x4) ∨ (x4 ∧ x6) ∨ (x6 ∧ x2) = (0 ∧ 0) ∨ (0 ∧ 1) ∨ (1 ∧ 0) = 0 ∨ 0 ∨ 0 = 0

Третья строка

(x2 ∧ x4) ∨ (x4 ∧ x6) ∨ (x6 ∧ x2) = (0 ∧ 1) ∨ (1 ∧ 0) ∨ (0 ∧ 0) = 0 ∨ 0 ∨ 0 = 0

Выражение подходит.

4) В третьей строке таблицы x1=1 и x4=1, значит x1∧x4=1. Выражение не подходит.

*Ответ:*3

Пример 2.

Для таблицы истинности функции F известны значения только некоторых ячеек:

x1	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**F**
			1		0		1
			0			0	1
0			1				0

Каким выражением может быть F?

1) x1 ∧ x2 ∧ x3 ∧ ¬x4 ∧ x5 ∧ x6 ∧ ¬x7

2) x1 ∨ ¬x2 ∨ x3 ∨ ¬x4 ∨ ¬x5 ∨ x6 ∨ ¬x7

3) ¬x1 ∧ x2 ∧ ¬x3 ∧ x4 ∧ x5 ∧ x6 ∧ x7

4) x1 ∨ x2 ∨ ¬ x3 ∨ x4 ∨ x5 ∨ ¬x6 ∨ x7

Решение:

Рассмотри поочерёдно все четыре выражения.

1) Выражение является конъюнкцией переменных и их отрицаний. Конъюнкция равна единице, когда все операнды равны единице. В первой строке x6 = 0, а значит и все выражение F равно нулю, что не соответствует таблице истинности.

2) Выражение является дизъюнкцией переменных и их отрицаний. Дизъюнкция равна единице, когда хотя бы один операнд равен единице. Подставим во второе выражение поочередно значения всех строк таблицы:

Первая строка

$x1 \vee \neg x2 \vee x3 \vee \neg x4 \vee \neg x5 \vee x6 \vee \neg x7 = x1 \vee \neg x2 \vee x3 \vee 0 \vee \neg x5 \vee 0 \vee \neg x7$ может принимать значение 1, если хотя бы один из операндов равен 1.

Вторая строка

$x1 \vee \neg x2 \vee x3 \vee \neg x4 \vee \neg x5 \vee x6 \vee \neg x7 = x1 \vee \neg x2 \vee x3 \vee 1 \vee \neg x5 \vee x6 \vee 1 = 1$

Третья строка

$x1 \vee \neg x2 \vee x3 \vee \neg x4 \vee \neg x5 \vee x6 \vee \neg x7 = 0 \vee \neg x2 \vee x3 \vee 0 \vee \neg x5 \vee x6 \vee \neg x7$ может принимать значение 0, если все остальные операнды равны 0.

3) Выражение является конъюнкцией переменных и их отрицаний. Конъюнкция равна единице, когда все операнды равны единице. Во второй строке $x4 = 0$, а значит и все выражение F равно нулю, что не соответствует таблице истинности.

4) Выражение является дизъюнкцией переменных и их отрицаний. Дизъюнкция равна единице, когда хотя бы один операнд равен единице. В третьей строке $x4 = 1$, значит и все выражение F равно 1, что не соответствует таблице истинности.

*Ответ:*2

Пример 3.

Логическая функция *F* задаётся выражением $(\neg z) \wedge x \vee x \wedge y$. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции *F* соответствует каждая из переменных *x, y, z*.

Перем. 1	**Перем. 2**	**Перем. 3**	**Функция**
???	**???**	**???**	**F**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

В ответе напишите буквы *x, y, z* в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала – буква, соответствующая 1-му столбцу; затем – буква, соответствующая 2-му столбцу; затем – буква, соответствующая 3-му столбцу). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение:

Выражение $(\neg z) \wedge x \vee x \wedge y$ является дизъюнкцией двух конъюнкций:

$((\neg z) \wedge x) \vee (x \wedge y)$. В обеих конъюнкциях присутствует x. Т. е. при x = 0 все выражение равно 0. Это выполняется только при Перем.3 = x.

Выражение равно 1, если x =1 и выполняется хотя бы одно из условий: y = 1 или z = 0. Из четвертой строки следует, что Перем.1 = z, а Перем.2 = y.

Ответ: zyx

Использование основных понятий математической логики. Логические высказывания, числовые отрезки.

Законы алгебры логики

	Для И	Для ИЛИ
двойного отрицания	¬ ¬ (A) = A	
исключения третьего	A & ¬A= 0	A ∨ ¬A= 1
исключения констант	A & 1 = A; A & 0 = 0	A ∨ 0 = A; A ∨ 1 = 1
повторения	A & A = A	A ∨ A = A
поглощения	A & (A ∨ B) = A	A ∨ A & B = A
переместительный	A & B = B & A	A ∨ B = B ∨ A
сочетательный	A & (B & C) = (A & B) & C	A ∨ (B ∨ C) = (A ∨ B) ∨ C
распределительный	A ∨ B & C = (A ∨ B) & (A ∨ C)	A&(B ∨ C) = A&B∨A&C
де Моргана	¬ (A&B) = ¬A ∨ ¬B	¬ (A ∨ B) = ¬A & ¬B

Поиск слова, удовлетворяющего условию логического высказывания

<u>Пример 1.</u>

Для какого имени истинно высказывание:

(*Вторая буква гласная* → *Первая буква гласная*) **Ù** *Последняя буква согласная*?

1) ИРИНА 2) МАКСИМ 3) МАРИЯ 4) СТЕПАН

Решение:

Высказывание является конъюнкцией двух выражений (*Вторая буква гласная* → *Первая буква гласная*) и *Последняя буква согласная*. Конъюнкция истинна тогда, когда все операнды истинны. Значит, выражение *Последняя буква согласная* должно быть истинным. Этому условию удовлетворяют имена под номерами 2 и 4.

Поочередно подставим в высказывание значения выражений для имен 2 и 4:

2) МАКСИМ

Вторая буква гласная = 1

Первая буква гласная = 0

Последняя буква согласная = 1

(1 → 0) Ù 1 = 0 Ù 1 = 0 Высказывание ложно.

4) СТЕПАН

Вторая буква гласная = 0

Первая буква гласная = 0

Последняя буква согласная = 1

(0 → 0) Ù 1 = 1 Ù 1 = 0 Высказывание истинно.

Ответ: 4

Поиск числа, удовлетворяющего условию логического высказывания

<u>Пример 2.</u>

Для какого из приведённых чисел X истинно логическое условие:

¬*((X кратно 5) → (X кратно 25))*?

1) 37

2) 59

3) 65

4) 125

Решение:

Для того, чтобы логическое условие *¬((X кратно 5) → (X кратно 25))* было истинным, необходимо, чтобы условие *(X кратно 5) → (X кратно 25)* было ложным. Импликация возвращает ложь, только если первый операнд равен 1 (истина), а второй - 0 (ложь).

Т.е. число X должно быть кратно 5, но не кратно 25.

Этому условию удовлетворяет только число под номером 3 (65).

*Ответ:*3

Пример 3.

Обозначим через $m\&n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Так, например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$. Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула $x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0)$ тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

Решение:

Для наглядности введем обозначения: $A \equiv (x\&A \neq 0)$; $B \equiv (x\&25 \neq 0)$; $C \equiv (x\&17 = 0)$.

Тогда формула принимает вид: $B \rightarrow (C \rightarrow A) = 1$

Заменяем первую импликацию: $\neg B \vee (C \rightarrow A) = 1$

Заменяем импликацию в скобках: $\neg B \vee (\neg C \vee A) = 1$

В результате имеем: $\neg B \vee \neg C \vee A = 1$

$x\&25 = 0 \vee x\&17 \neq 0 \vee x\&A \neq 0 = 1$

Выражение является дизъюнкцией трех операндов. Дизъюнкция истинна, когда хотя бы один операнд принимает значение истина (1).

$25_{10} = 11001_2$, тогда $x\&25 = 0$ истинно для всех x, имеющих нули в 0-м, 3-м и 4-м (справа) разрядах двоичной записи: x = *…*00**0

$17_{10} = 10001_2$, тогда $x\&17 \neq 0$ истинно для всех x, имеющих единицы в 0-м или 4-м разряде: x = *…*1 или x = *…1****.

«незакрытыми» (не входящими ни в первое, ни во второе множество) на числовой оси остались x, имеющие нули в 0-м и 4-м разрядах и единицу в 3-м разряде: x = *…*01**0.

Значит, A должно быть таким, чтобы конъюнкция с оставшимися числами *x* не была равна нулю, т.е. в 3-м разряде двоичной записи числа A должна стоять единица. Наименьшим таким числом является $1000_2 = 8_{10}$.

Ответ: 8

Поиск числового отрезка, удовлетворяющего условию логического высказывания

Пример 4.

На числовой прямой даны два отрезка: P=[3, 13] и Q=[7, 17]. Выберите такой отрезок A, чтобы формула

$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee \neg (x \in Q)$

была тождественно истинна, то есть принимала значение 1 при любом значении переменной x.

1) [5, 20]

2) [10, 25]

3) [15, 30]

4) [20, 35]

Решение:

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$; $(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$.

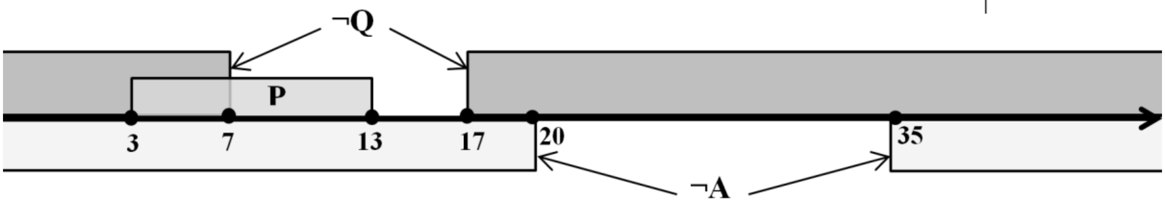
Применив преобразование импликации, получаем:

$\neg A \vee P \vee \neg Q$.

Изобразим множества P и ¬ Q на числовой прямой:

Выражение должно быть истинно для любого x, значит нужно «закрасить» всю числовую прямую. Для этого выражение ¬A должно «закрасить» оставшийся отрезок [13;17], т.е. быть истинным на этом отрезке. Тогда, выражение A должно быть истинно внутри промежутка, который не имеет ни одной общей точки с отрезком [13;17].

Из всех отрезков только отрезок [20, 35] удовлетворяет этим условиям:



Правильный ответ указан под номером 4.

*Ответ:*4

<u>Пример 5.</u>

На числовой прямой даны два отрезка: P = [25; 50] и Q = [32; 47]. Укажите наибольшую возможную длину промежутка A, для которого формула

(¬ (x Î A) → (x Î P)) → ((x Î A) → (x Î Q))

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение:

Введем обозначения:

(x ∈A) ≡ A; (x ∈ P) ≡ P; (x ∈ Q) ≡ Q.

Тогда формула примет вид:

$(\neg A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow Q)$

Преобразуем данное выражение (заменим импликацию):

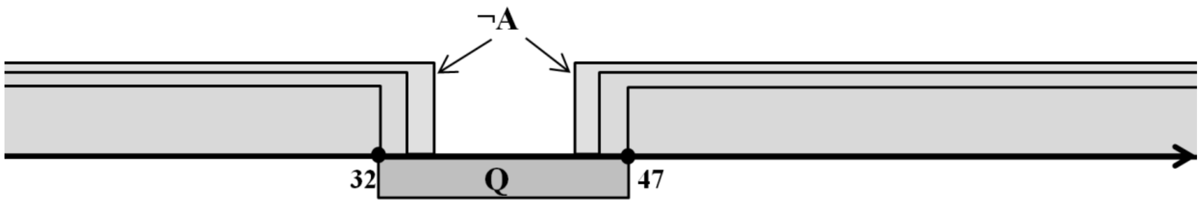
$(A \vee \neg P) \rightarrow (\neg A \vee Q)$

$\neg (A \vee \neg P) \vee (\neg A \vee Q)$

$(\neg A \wedge P) \vee \neg A \vee Q$

$((\neg A \wedge P) \vee \neg A) \vee Q$

$\neg A \vee Q$



Выражение (¬ A ∨ Q) должно быть истинным на всей числовой прямой. Множество Q – это отрезок [32, 47], значит выражение ¬A должно «закрасить» оставшуюся часть числовой оси, т.е. быть истинным на этом промежутке. Тогда, выражение A должно быть истинно внутри промежутка [32;47]. Тогда максимальная длина отрезка A достигается, когда A совпадает с Q, и равна 15.

Ответ: 15

Поиск множества чисел, удовлетворяющего условию логического высказывания

Пример 6.

Элементами множеств А, P, Q являются натуральные числа, причём

P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}, Q = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}.

Известно, что выражение ((x A) → (x P)) ∨ (¬(x Q) → ¬(x A))

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной х.

Определите наибольшее возможное количество элементов в множестве A.

Решение:

Введем обозначения:

(x ∈A) ≡ A; (x ∈ P) ≡ P; (x ∈ Q) ≡ Q.

Тогда выражение примет вид:

(A → P) ∨ (¬ Q → ¬ A)

Преобразуем выражение (заменим импликацию):

(¬ A ∨ P) ∨ (Q ∨ ¬ A)

¬ A ∨ P ∨ Q

Чтобы выражение было истинно при любом значении переменной *x*, все натуральные числа должны либо входить в P, либо входить в Q, либо не входить в A. Т.е. ¬ A – это все числа, не входящие ни в P, ни в Q. Значит A – это числа, входящие в P или Q. Наибольшее возможное количество элементов в множестве A – это количество всех различных элементов множеств P и Q. Таких элементов 17.

*Ответ:*17

Пример 7.

Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \to (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

Решение:

Введем обозначения:

$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \equiv P$; $(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \equiv Q$; $(x \in A) \equiv A$.

Тогда выражение примет вид:

$P \to ((Q \wedge \neg A) \to \neg P)$

Преобразуем выражение (заменим импликацию):

$P \to (\neg(Q \wedge \neg A) \vee \neg P)$

$\neg P \vee (\neg(Q \wedge \neg A) \vee \neg P)$

$\neg P \vee \neg Q \vee A$.

Выражение $\neg P \vee \neg Q$ истинно при всех значениях x, кроме значений 6 и 12. Следовательно, промежуток A должны содержать точки 6 и 12. То есть минимальный набор точек в промежутке $A \equiv \{6, 12\}$. Сумма элементов множества A равна 18.

*Ответ:*18