14-е задание: «Операции в системах счисления»

<u>Уровень сложности</u> — повышенный,
<u>Требуется использование специализированного программного обеспечения</u> — нет,
<u>Максимальный балл</u> — 1,
<u>Примерное время выполнения</u> — 5 минут.

Проверяемые элементы содержания: *Знание позиционных систем счисления*

Задание 14_7:

14_7: **Разбор задания 14 ЕГЭ по информатике (с сайта К. Полякова, вариант 36):**
*Укажите, сколько всего раз встречается **цифра 2** в записи чисел **13, 14, 15, …, 23** в системе счисления **с основанием 3**.*

Ответ: 13

Показать решение:

- Для начала достаточно перевести первое и последнее число предложенного интервала в троичную систему счисления. Сделаем это:

```
1.
 13 |_3
 12   4 |_3
  1   3   1
      1
131_0 = 111_3


2.
23 |_3
21   7 |_3
2    6   2
     1
23_10 = 212_3
```

- Теперь добавим промежуточные числа в троичной системе счисления (прибавляя единицу к каждому очередному полученному числу), не забывая, что в троичной системе всего три цифры (**0, 1** и **2**):

```
111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212
```

- На всякий случай стоит посчитать количество полученных чисел и сравнить их с количеством чисел в исходной последовательности.
- Теперь осталось посчитать количество цифр **2** в полученной последовательности. Их **13**:

```
111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212
```

Задание 14_6:

Разбор 14 (16) задания ЕГЭ по информатике 2019 г. «10 тренировочных вариантов для подготовки к ЕГЭ» Д.М. Ушаков:

Решите уравнение:

$$204_{N+1} = 204_N + 26_{16}$$

*В ответе укажите значение переменной **N**.*

Ответ: 9

Показать решение:

- Разделим уравнение на три части и вычислим каждую часть отдельно (выделим части разным цветом):

```
204_(N+1) = 204_N + 26_16
 1          2      3
```

- Используем формулу разложения числа по степеням основания:

```
1.
210
204_(N+1)

По формуле получаем:
2*(N+1)^2 + 0*(N+1)^1 + 4*(N+1)^0 =
= 2*(N^2 + 2N + 1) + 0 + 4 = 2N^2 + 4N + 6
```

- Выполним то же самое для остальных двух частей:

```
2.
210
204N

По формуле получаем:
2*N2 + 0*N1 + 4*N0 =
= 2N2 + 4
3.
2616 = 3810
```

- Подставим результаты всех частей в уравнение:

```
2N2 + 4N + 6 = 2N2 + 4 + 38;
4N = 36;
N = 9
```

Задание 14_8:

14_8: **Разбор задания 14 ЕГЭ по информатике (с сайта К. Полякова, вариант 38):**

Найдите основание системы счисления, в которой выполнено сложение:

```
144 + 24 = 201
```

Ответ: 7

Показать решение:

- Вместо обозначения искомой системы счисления введем неизвестное x:

```
144x + 24x = 201x
```

- Запишем формулу перевода в десятичную систему счисления каждого из слагаемых и сумму исходного равенства:

```
144 + 24 = 201
```

```
1*x² + 4*x¹ + 4*x⁰ + 2*x¹ + 4*x⁰ = 2*x² + 0*x¹ + 1*x⁰
```

- Упростим полученное уравнение:

```
x² - 6x - 7 = 0
```

- Решим уравнение:

```
D = b² - 4ac = 36 - 4*1*(-7) = 64

x = (-b ± √D)/2a

x1 = (6 + 8)/2 = 7

x2 = (6 - 8)/2 - не подходит

x = 7
```

Задание 14_9:

14_9: **Разбор задания 14 (16) ЕГЭ по информатике (с сайта К. Полякова, вариант 75):**

В некоторой системе счисления записи десятичных чисел **68** и **94** заканчиваются на **3**. *Определите основание системы счисления.*

Ответ: 13

Показать решение:

- Вспомним правило:

Последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием **X** — это остаток от деления этого числа на **X**

- Примем искомую систему счисления за **x**. Тогда, исходя из приведенного правила имеем:

```
94 / x = некоторое число и остаток 3

и

68 / x = некоторое число и остаток 3
```

- Поскольку **x** должно быть целым числом, то следующее деление должно выполняться без остатка:

```
91/x
65/x
```

- Иными словами **x** — наибольший общий делитель чисел *91* и *65*.
- Найдем НОД, например, по алгоритму Евклида:

```
91 - 65 = 26
65 - 26 = 39
39 - 26 = 13
26 - 13 = 13
```

- Получаем результат **13**.

Задание 14_10:

14_10: **Разбор задания 14 ЕГЭ по информатике (с сайта К. Полякова, вариант 137):**

Некоторое число *X* из десятичной системы счисления перевели в системы счисления с основаниями **16**, **8**. Часть символов при записи утеряна. Позиции утерянных символов обозначены *:

$X = {*}5_{16} = {*}0{*}_8$

Сколько чисел соответствуют условию задачи?

Ответ: 3

Показать решение:

- Данные числа с утерянными символами переведем из 16-й и из 8-й системы счисления в двоичную. Перевод будем делать триадами и тетрадами, неизвестные позиции оставим пустыми:

```
1. *5₁₆
    *   |    5  ₁₆

* * * * | 0 1 0 1 ₂

2. *0*₈
```

```
  *  |  0  |  *  8
* * *|0 0 0|* * * 2
```

- Сопоставим известные и неизвестные биты в обеих получившихся масках:

```
* * 0 0 0 1 0 1
```

- Неизвестными остались 7-й и 8-й бит. Они не могут быть одновременно нулями, так как для **$*0*_8$** тогда исчезнет старший разряд. Поэтому оставшиеся варианты будут такими:

```
1. 01000101
2. 10000101
3. 11000101
```

- Итого **3** варианта.

Задание 14_4:

Задание 14_4:

*Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа **75** оканчивается на **13**.*

Ответ: 8,72

✍ **Показать решение:**

- Так как *75* должно оканчиваться на *13*, то имеем два общих случая:

```
1. 75₁₀ = 13N
2. 75₁₀ = ...13N (число оканчивается на 13)
```

- Рассмотрим подробно каждый случай.

  1 случай:

- Остаток должен быть равен *3* (последнее число в неизвестной системе), а частное должно равняться *1* (предпоследнее число в неизвестной системе):

```
_75|N
```

```
 N|1  отсюда имеем => 75 - N = 3; т.е. N = 72
 3
```

- Таким образом, мы получили одно из искомых оснований (72).

  2 случай:

- Искомое оканчивается на цифру *3*, значит:

```
_75|N
 72|y  отсюда имеем => 75 = Ny + 3, где N - целое, неотриц.
  3
```

- и далее, частное от деления — *1* (предпоследнее число):

```
_75|N
 72|_ y |N   => y = Nz + 1, где z - целое, неотриц.
  3  y-1|z
         1
```

- Получаем два равенства (систему уравнений):

```
75 = Ny + 3
y = Nz + 1
```

- Подставим *y* из второго равенства в первое:

```
75 = N (Nz + 1) + 3;
75 = N²z + N + 3;
75 = N²z + N
```

- Выразим *z*:

```
z = (72 - N)/N²
```

- Учитывая то, что *z* — целое неотрицательное число, то *72 — N* должно быть кратно N^2, т.е. в числителе не может быть простого числа.
- Простое число *67* получается путем вычитания из 72 числа *5*. Соответственно, *5* нам не подходит: **N ≠ 5**:

```
72 - 5 / 5² = 67 / 25  не делится, - не подходит!
```

- Еще одно простое число — *71* получится при вычитании *72 — 1*. Единица не подходит, так как при переводе в конце числа никак не останется *13*: **N ≠ 1**.
- Раз в знаменателе N^2, то отбросим все числа, квадрат которых больше *72*: 9, 10, … и т.д. до бесконечности: **N < 9**

- Раз в итоговом числе есть число *13*, значит основание системы счисления больше *3* (т.е. цифра *три* присутствует в системах, начиная с *4-й*): **N >= 4**
- Проверим оставшиеся варианты — *4, 6, 7, 8*:

```
_75 |_4
 72 |_18|_4
  3  _16| 2
       2  => не подходит! должна быть единица
_75 |_6
 72 |_12|_6
  3  _12| 1
       0  => не подходит! должна быть единица
_75 |_7
 70
  5 => не подходит! должна быть 3
_75 |_8
 72 |_9|_8
  3  _8| 1
       1  => подходит!
```

Задание 14_11:

14_11: **Разбор задания 14 ЕГЭ по информатике (с сайта К. Полякова, вариант 221):**

Выражение 2^5*3^{25} записано в троичной системе счисления. *Определите, сколько в этой записи цифр* ***0, 1*** *и* ***2***.

Ответ: «0»=26, «1»=2, «2»=1

Показать решение:
Рассмотрим каждый сомножитель отдельно.

- Первый сомножитель:

```
2⁵ = 32
```

```
Переведем в троичную систему счисления (делением на 3, переписываем остатки).
Результат:
32₁₀ = 1012₃
```

- Для рассмотрения второго сомножителя будем использовать правило:

$$3^N = \underbrace{10\ldots0}_{N}{}_3$$

- Получим:

```
3²⁵ = 10..0{25 нулей}₃
```

- Выполним произведение, но для простоты счета, представим, что нулей не *25*, а только *3*:

```
   1000 x
   1012 =
   ----
   2000
  1000
 0000
1000
-------
1012000
```

- В исходном числе было *3* нуля, стало *4*. Значит если было *25* нулей, то станет *25 + 1 =* ***26***.
- Единиц = **2**, двоек = **1**.

Задание 14_1:

Задание 14 (16) ЕГЭ по информатике 2017 ФИПИ вариант 3 (Крылов С.С., Чуркина Т.Е.):

Значение арифметического выражения: **2^{1024} + 4^{64} — 64** записали в системе счисления с основанием **2**.

*Сколько цифр «**1**» содержится в этой записи?*

Ответ: 123

✍ **Показать решение:**

- Существует правило:

$2^N = 10..0_2$(1 единица и N нулей)

- Чтобы воспользоваться этим правилом, преобразуем общее выражение к степеням двойки:

```
2^1024 + (2^2)^64 - 2^6 = 2^1024 + 2^128 - 2^6
```

- При переводе в двоичную систему получим:

```
10...0 (1024 нуля) + 10...0 (128 нулей) - 10...0 (6 нулей)
```

- Обратим внимание, что разница между числами большая. Т.е. при выполнении сложения в столбик, единицы в одном и том же разряде быть не могут. Так:

```
 10....00000  - 1024 нуля
+
       10..0  - 128 нулей
_________________________
 10....10..0
```

- Из первого слагаемого *10…0 (1024 нуля)* запомним одну единицу в старшем бите, остальные нули нас не интересуют, так как далее мы воспользуемся другим правилом — для разницы:

```
 10....00000  - 1024 нуля
+
       10..0  - 128 нулей
_________________________
 10....10..0  - запомним единицу
```

- Существует также правило:

2^N — 2^K = 1…1 (N - K единиц)0…0(K нулей)

- По формуле выполним вычитание *2^{128} — 2^6*: получим *1..1 (122 единицы) 0..0(6 нулей)*:

```
 10..0000000  - 128 нулей
-
```

```
    1000000
___________________________
 11..1000000  - 122 единицы и 6 нулей
```

- Прибавим к *122* получившимся единицам еще одну из первого слагаемого (10…0 (1024 нуля)) и получим:

```
122 + 1 = 123 единицы
```

Задание 14_3:

14 (16) задание. Демоверсия ЕГЭ 2018 информатика:

Значение арифметического выражения: $\mathbf{49^{10}}$ **+** $\mathbf{7^{30}}$ **–** **49**
записали в системе счисления с основанием **7**.

*Сколько цифр «**6**» содержится в этой записи?*

Ответ: 18

✍ **Показать решение:**

- Приведем все числа к степеням 7:

```
7²⁰ + 7³⁰ - 7²
```

- Расставим операнды выражения в порядке убывания степеней:

```
7³⁰ + 7²⁰ - 7²
```

- Вспомним две формулы для работы со системами счисления:

```
1.
aⁿ = 10..0ₐ
       n

2.
aⁿ - aᵐ = (a-1)..(a-1)0..0ₐ
              n-m        m
```

- Переведем первое число согласно *формуле 1*:

```
7³⁰ = 10..0
         30
```

- В данном числе нет цифры 6, как и в остальных числах.
- Цифра 6 появляется при выполнении вычитания.
- Подсчитаем все «6», используя *формулу 2*:

```
0 + (20 - 2) = 18
```

- Получаем шестерок: 18

Результат: 18

Задание 14_2:

Задание 14 (16) ЕГЭ по информатике 2017 ФИПИ вариант 5 (Крылов С.С., Чуркина Т.Е.):

Значение арифметического выражения: **4^{500} + $3*4^{2500}$ + 16^{500} — 1024** записали в системе счисления с основанием **4**.

*Сколько цифр «**3**» содержится в этой записи?*

Ответ: 496

✍ **Показать решение:**
Результат: 496

Задание 14_5:

Разбор 14 (16) задания ЕГЭ по информатике, вариант 2 (ФИПИ, «ЕГЭ информатика и ИКТ, типовые экзаменационные варианты 2018», 10 вариантов, С.С. Крылов, Т.Е. Чуркина):

Значение арифметического выражения: $\mathbf{8^{1024} + 8^{32} – 65}$ – записали в системе счисления с основанием **8**. *Сколько цифр «7» содержится в этой записи?*

Ответ: 31

✍ **Показать решение:**

- Приведем все числа к степеням восьмерки:

```
65 = 64 + 1 = 8² + 8⁰;
```

- Получаем:

```
8¹⁰²⁴ + 8³² - (8² + 8⁰);
8¹⁰²⁴ + 8³² - 8² - 8⁰
```

- Вспомним две формулы для работы с системами счисления:

```
1.
aⁿ = 10..0ₐ
        n

2.
aⁿ - aᵐ = (a-1)..(a-1)0..0ₐ
              n-m        m
```

- Переведем первое число согласно *формуле 1*:

```
8¹⁰²⁴ = 10..0
         1024
```

- В данном числе нет цифры *7*, как и в остальных числах.
- Цифра *7* появляется при выполнении вычитания. У нас два таких действия, идущих подряд. Это неудобно. Необходимо, чтобы действия чередовались (**a + b — c + d — e…**)
- Вспомним еще одну формулу:

```
3.
-2ⁿ = -2ⁿ⁺¹ + 2ⁿ


! Формула предназначена для чисел в двоичной системе счисления,
но для подсчета цифр "7" в 8-й (или "6" в 7-й и т.п.) ее можно использовать
```

```
(для поиска единиц или нулей она не подходит!!!)
```

- В нашем случае заменим часть выражения:

```
-8² = -8³ + 8²
! обратите внимание, что тождество неверно, но
при поиске количества "7" этой формулой можно воспользоваться
(для поиска единиц или нулей она не подходит!)



Получаем:


8¹⁰²⁴ + 8³² - 8³ + 8²- 8⁰
```

- Получили чередование операций «+» и «-«.
- Теперь посчитаем все *«7»*, используя **формулу 2**:

```
0 + (32 - 3) + (2 - 0) = 31
```

- Получаем семерок: 31